

## SOBRE OS MODELOS CONSTITUTIVOS COM CINÉTICA DE TRANSFORMAÇÃO ASSUMIDA PARA LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA

**Alberto Paiva**

**Marcelo A. Savi**

Instituto Militar de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais  
22.290.270 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

E-Mail: savi@epq.ime.eb.br

**Resumo.** *Este trabalho apresenta uma revisão sobre os modelos constitutivos com cinética de transformação de fase assumida para descrever o comportamento termomecânico de ligas com memória de forma. A partir de simulações numéricas, desenvolve-se uma comparação crítica desses modelos. Discute-se também a resposta prevista a carregamentos gerando subloops de histerese associados a transformação de fase incompletas.*

**Palavras-chave.** *Ligas com Memória de Forma, Pseudoelasticidade, Modelos Constitutivos.*

### 1. INTRODUÇÃO

Os efeitos de memória de forma e pseudoelasticidade são fenômenos termoelásticos, associados à transformação de fase martensítica presentes nas ligas com memória de forma (SMAs). Outro fenômeno característico dessas ligas é o efeito *two way* conseguido após submetê-las a um processo de treinabilidade (Zhang *et al.* 1997), permitindo associar uma determinada forma a cada fase do material.

As SMAs vêm motivando diversas aplicações em diferentes áreas do conhecimento, dentre as quais vale destacar a indústria aeroespacial, automotiva e biomédica. No controle estático ou dinâmico, as SMAs podem ser utilizadas como sensores ou atuadores, sendo usualmente empregadas como fibras embebidas em uma matriz (Rogers *et al.*, 1990). Na indústria aeroespacial, as ligas são utilizadas em diversas situações e, recentemente, desenvolveu-se um dispositivo de separação responsável pela abertura dos painéis solares de satélites, o que substituiu a abordagem pirotécnica (Pacheco & Savi, 1997). Muitas aplicações têm sido estudadas na engenharia biomédica. Na ortodontia, por exemplo, o emprego de aparelhos com memória de forma trouxe resultados muito satisfatórios, difundindo bastante o uso destas ligas (Airoldi *et al.*, 1997).

Visando uma correta análise do comportamento termomecânico das SMAs, tem-se tornado cada vez mais importante a elaboração de modelos capazes de descrevê-lo de forma adequada. A modelagem destas ligas possui duas abordagens distintas. A primeira, microscópica, leva em consideração aspectos metalúrgicos (Achenbach & Müller, 1982). A segunda abordagem, macroscópica, descreve os aspectos fenomenológicos (Birman, 1997). Dentro dessa linha, a seguinte classificação pode ser proposta: Modelos polinomiais, modelos

baseados na plasticidade, modelos com restrições internas e modelos com cinética de transformação assumida.

O modelo polinomial foi proposto por Falk (1980) baseado na teoria de Devonshire. Esse modelo unidimensional define uma energia livre de Helmholtz na forma polinomial, sendo capaz de descrever os comportamentos de pseudoelasticidade e memória de forma. A grande vantagem desse modelo é a sua simplicidade.

Os modelos baseados na plasticidade se propõem a explorar as idéias bem estabelecidas da teoria da plasticidade. Bertram (1982) propôs um modelo tridimensional utilizando conceitos de endurecimento cinemático e isotrópico. Mamiya e co-autores (da Silva, 1995; Souza *et al.*, 1998) também apresentam modelos capazes de descrever os fenômenos de memória de forma e pseudoelasticidade utilizando os conceitos da plasticidade. Os trabalhos de Auricchio e co-autores também podem ser enquadrados nessa idéia. Inicialmente propostos para um contexto unidimensional, o modelo foi posteriormente extrapolado para um contexto tridimensional (Auricchio & Lubliner, 1997; Auricchio *et al.*, 1997; Auricchio & Sacco, 1997).

Os modelos com restrições internas consideram restrições associadas a coexistência das diferentes fases do material. Nesse contexto, Fremond (1987) desenvolveu um modelo tridimensional que também representa os fenômenos de memória de forma e pseudoelasticidade, onde foram empregadas três variáveis internas que devem obedecer a restrições internas. As limitações dessa teoria foram discutidas em Savi & Braga (1993). De fato, os modelos de Auricchio e co-autores também poderiam ser bem enquadrados nesta classificação uma vez que impõem restrições internas na sua formulação.

Os modelos com cinética de transformação assumida consideram que a transformação de fase é regida por uma função conhecida. O primeiro modelo a apresentar esta formulação foi proposto por Tanaka & Nagaki (1982), tendo dado origem a outros modelos que apresentam alterações na cinética de transformação como Liang & Rogers (1990), Brinson (1993), Boyd & Lagoudas (1994), Ivshin & Pence (1994), dentre outros. Pelo fato de seu uso ter se popularizado, esses modelos apresentam maiores comprovações experimentais, ocupando um importante espaço na modelagem das SMAs.

Este trabalho apresenta uma revisão crítica sobre os principais modelos com cinética de transformação assumida. Discutem-se os modelos de Tanaka, Boyd & Lagoudas, Liang & Rogers e Brinson. Apresentam-se algumas simulações numéricas, comparando a resposta prevista por cada um dos modelos. A questão dos *subloops* de histerese, associados a transformação de fase incompletas, também é abordada.

## 2. MODELOS COM CINÉTICA DE TRANSFORMAÇÃO ASSUMIDA

Os modelos com cinética de transformação assumida consideram, além da deformação,  $\varepsilon$ , e da temperatura,  $T$ , uma variável interna escalar,  $\beta$ , que representa a fração volumétrica da fase martensítica. A relação constitutiva entre a tensão,  $\sigma$ , e as variáveis internas para uma SMA, pode ser expressa da seguinte maneira, na forma de taxas

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - \alpha\dot{\beta} - \Omega\dot{T} \quad (1)$$

onde  $E$  representa o tensor elástico,  $\alpha$  o tensor transformação e  $\Omega$  o tensor termoelástico. Estudos experimentais (Brinson, 1993) revelam que estes coeficientes devem ser expressos em função das variáveis de estado  $\varepsilon$ ,  $T$  e  $\beta$ , no entanto, de uma maneira geral, são considerados constantes.

A constante  $\alpha$  pode ser definida a partir de uma análise da deformação residual do material,  $\varepsilon_R$ , após um processo de carga e descarga. Considere a deformação acumulada pelo

material após ter sido carregado até alcançar a transformação de fase completa e em seguida descarregado, em uma temperatura inferior a  $A_S$  (temperatura de início de formação de austenita). Nesse caso, de acordo com a Eq. (1), obtém-se

$$\alpha = -\varepsilon_R E . \quad (2)$$

Tendo em vista a natureza não difusiva da transformação martensítica (Tanaka, 1985), a fração volumétrica de martensita é expressa em função dos valores instantâneos de tensão e temperatura, conforme a seguir

$$\beta = \beta(\sigma, T) \quad (3)$$

Neste trabalho consideram-se as ligas em que  $M_S < M_f < A_S < A_f$ , que representam, respectivamente, as temperaturas de início e fim de formação de martensita e início e fim de formação de austenita (Brinson, 1993). Consideram-se também as versões unidimensionais dos modelos.

## 2.1 Modelo de Tanaka e de Boyd & Lagoudas

O modelo de Tanaka e co-autores foi originalmente desenvolvido para descrever problemas tridimensionais envolvendo o fenômeno de memória de forma. No entanto, sua implementação ficou restrita ao caso unidimensional (Tanaka & Nagaki, 1982; Tanaka, 1985). As transformações de fase são descritas através de funções exponenciais. Assim, para a transformação austenita  $\Rightarrow$  martensita, admite-se a seguinte função:

$$\beta = 1 - \exp[-a_M (M_S - T) - b_M \sigma] + \beta_0 \quad (4)$$

onde  $a_M$  e  $b_M$  são constantes positivas do material enquanto  $\beta_0$  representa a fração volumétrica de martensita quando se inicia a transformação. O limite que determina o início da transformação é definido por  $\sigma_{M_S} \geq a_M / b_M (T - M_S)$ . Uma vez que a transformação é governada por uma lei exponencial, a variável interna  $\beta$  tende assintoticamente para o valor unitário. O artifício utilizado para contornar esse problema é considerar que a transformação está totalmente completa quando  $\beta = 0,99$ . Assim, obtém-se uma expressão para o término da transformação,

$$\sigma_{M_f} = \frac{2 \ln(10)}{b_M} - \frac{a_M}{b_M} (M_S - T) \quad (5)$$

A transformação inversa é descrita por outra função exponencial

$$\beta = \beta_0 \exp[-a_A (T - A_S) - b_A \sigma] \quad (6)$$

onde  $a_A$  e  $b_A$  são constantes do material, enquanto  $\beta_0$  representa a fração volumétrica de martensita quando se inicia a transformação. Esta equação se aplica para valores de tensão tais que  $\sigma_{A_S} \leq a_A / b_A (T - A_S)$ . Artifício análogo ao da transformação direta é empregado na obtenção do limite final da transformação inversa. Considerando que a transformação está completa quando  $\beta = 0,01$ , tem-se

$$\sigma_{A_f} = -\frac{2 \ln(10)}{b_A} - \frac{a_A}{b_A} (A_s - T) \quad (7)$$

O modelo de Boyd & Lagoudas (1994) apresenta modificações em relação ao modelo de Tanaka que permitiram o desenvolvimento de uma teoria tridimensional. As relações utilizadas para descrever a cinética de transformação são semelhantes às empregadas no modelo de Tanaka, considerando que as constantes  $a_M$ ,  $b_M$ ,  $a_A$  e  $b_A$  são definidas de forma diferente (Brinson & Huang, 1995). Para a transformação austenita  $\Rightarrow$  martensita a cinética é definida pela seguinte expressão,

$$\beta = 1 - \exp[-a_M (M_s - T) - b_M \bar{\sigma}] + \beta_0 \quad (8)$$

onde  $\bar{\sigma} = [3/2 \sigma : \sigma]^{1/2}$  representa a tensão efetiva. Além disso, as constantes são dadas por

$$a_M = \frac{2 \ln(10)}{M_s - M_f} \quad \text{e} \quad b_M = \frac{a_M}{C_M} \quad (9)$$

sendo  $C_M$  uma constante. Para a transformação inversa (martensita  $\Rightarrow$  austenita), tem-se

$$\beta = \beta_0 \exp[-a_A (T - A_s) - b_A \bar{\sigma}] \quad (10)$$

onde

$$a_A = -\frac{2 \ln(10)}{A_s - A_f} \quad \text{e} \quad b_A = \frac{a_A}{C_A} \quad (11)$$

e aqui  $C_A$  é uma constante.

## 2.2 Modelo de Liang & Rogers

O modelo de Liang & Rogers (1990) é unidimensional e considera uma lei de transformação envolvendo cosenos. Esse modelo foi aplicado em estudos envolvendo controle acústico de vibrações (Rogers *et al.*, 1991; Anders *et al.*, 1992) e os resultados são coerentes com dados experimentais. Liang & Rogers (1991) desenvolvem um modelo tridimensional onde sugerem que as transformações de fase são governadas pela energia de distorção. A lei de transformação austenita  $\Rightarrow$  martensita para o modelo de Liang & Rogers considera uma expressão do tipo

$$\beta = \frac{1 - \beta_0}{2} \cos \left[ a_M \left( T - A_f - \frac{\sigma}{C_M} \right) \right] + \frac{1 + \beta_0}{2} \quad (12)$$

que ocorre para  $C_M (T - M_s) < \sigma < C_M (T - M_f)$ . Por outro lado, a transformação inversa acontece para  $C_A (T - A_f) < \sigma < C_A (T - A_s)$ , e é dada através da seguinte expressão,

$$\beta = \frac{\beta_0}{2} \left\{ \cos \left[ a_A \left( T - A_s - \frac{\sigma}{C_A} \right) \right] + 1 \right\} \quad (13)$$

de modo que

$$a_A = \frac{\pi}{A_f - A_s} \quad \text{e} \quad a_M = \frac{\pi}{M_s - M_f} \quad (14)$$

### 2.3 Modelo de Brinson

O modelo de Brinson apresenta mais uma proposta de modificação na cinética de transformação de fase (Brinson, 1993). Assim como no modelo de Liang & Rogers, utilizam-se expressões cosenoidais. No entanto, este modelo introduz uma inovação, separando a variável interna,  $\beta$ , em duas novas variáveis utilizadas para representar de forma distinta as frações martensíticas induzidas por temperatura,  $\beta_T$ , e por tensão,  $\beta_S$ , de forma que

$$\beta = \beta_T + \beta_S \quad (15)$$

A partir da consideração destas novas variáveis, a equação constitutiva é reescrita da seguinte forma

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} - \alpha \dot{\beta}_S - \Omega \dot{T} \quad (16)$$

Brinson (1993) estabelece ainda uma relação linear envolvendo os módulos de elasticidade do material correspondentes às fases austenítica,  $E_A$ , e martensítica,  $E_M$ , tal que

$$E(\beta) = E_A + \beta (E_M - E_A) \quad (17)$$

A cinética de transformação é dada através de equações envolvendo cossenos que descrevem a evolução da fração martensítica. A transformação austenita  $\Rightarrow$  martensita para  $T > M_s$  e  $\sigma_s^{CRIT} + C_M (T - M_s) < \sigma < \sigma_f^{CRIT} + C_M (T - M_s)$  é expressa por

$$\beta_S = \frac{1 - \beta_{S_0}}{2} \cos \left\{ \frac{\pi}{\sigma_s^{CRIT} - \sigma_f^{CRIT}} \left[ \sigma - \sigma_f^{CRIT} - C_M (T - M_s) \right] \right\} + \frac{1 + \beta_{S_0}}{2} \quad (18)$$

$$\beta_T = \beta_{T_0} - \frac{\beta_{T_0}}{1 - \beta_{S_0}} (\beta_S - \beta_{S_0}) \quad (19)$$

enquanto para  $T < M_s$  e  $\sigma_s^{CRIT} < \sigma < \sigma_f^{CRIT}$ :

$$\beta_S = \frac{1 - \beta_{S_0}}{2} \cos \left[ \frac{\pi}{\sigma_s^{CRIT} - \sigma_f^{CRIT}} (\sigma - \sigma_f^{CRIT}) \right] + \frac{1 + \beta_{S_0}}{2} \quad (20)$$

$$\beta_T = \beta_{T_0} - \frac{\beta_{T_0}}{1 - \beta_{S_0}} (\beta_S - \beta_{S_0}) + \Delta_T \quad (21)$$

onde

$$\Delta_T = \begin{cases} \frac{1 - \beta_{T_0}}{2} \left\{ \cos \left[ a_M \left( T - M_f \right) \right] + 1 \right\}, & \text{se } M_f < T < M_S \text{ e } T < T_0 \\ 0, & \text{demais casos} \end{cases} \quad (22)$$

A transformação inversa ocorre para  $T > A_S$  e  $C_A (T - A_f) < \sigma < C_A (T - A_S)$

$$\beta_S = \frac{\beta_{S_0}}{2} \left\{ \cos \left[ a_A \left( T - A_S - \frac{\sigma}{C_A} \right) \right] + 1 \right\} \quad (23)$$

$$\beta_T = \frac{\beta_{T_0}}{2} \left\{ \cos \left[ a_A \left( T - A_S - \frac{\sigma}{C_A} \right) \right] + 1 \right\} \quad (24)$$

de modo que  $a_M$  e  $a_A$  são similares aos definidos no modelo de Liang & Rogers, enquanto  $\beta_{S_0}$  e  $\beta_{T_0}$  representam as frações volumétricas de martensita induzidas por tensão e por temperatura, respectivamente, quando se dá início a transformação.

### 3. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção, apresentam-se algumas simulações numéricas dos modelos discutidos. Considera-se uma liga Nitinol cujas propriedades termomecânicas estão apresentadas na Tabela 1 (Brinson, 1993).

Tabela 1 - Propriedades Termomecânicas para liga Nitinol.

Propriedades do Material	Temperaturas de Transformação	Constantes Associadas à Transformação
$E_A = 67 \times 10^3$ MPa	$M_f = 9$ °C	$C_M = 8$ MPa / °C
$E_M = 26,3 \times 10^3$ MPa	$M_S = 18,4$ °C	$C_A = 13,8$ MPa / °C
$\Omega = 0,55$ MPa / °C	$A_f = 34,5$ °C	$\sigma_S^{CRIT} = 100$ MPa
$\varepsilon_R = 0,067$	$A_S = 49$ °C	$\sigma_f^{CRIT} = 170$ MPa

A Fig.1 mostra uma comparação entre as curvas tensão-deformação previstas pelos modelos em questão, para diferentes temperaturas. Vê-se que todos os modelos são capazes de descrever os fenômenos de memória de forma e pseudoelasticidade, no entanto, algumas diferenças devem ser ressaltadas. A primeira delas está relacionada aos limites inicial e final da tensão de transformação. Conforme ressaltado por Brinson (1993), a tensão crítica para a conversão da martensita maclada é constante e pode ser considerada uma propriedade do material, enquanto para  $T > M_S$  tem-se uma função linear da temperatura. Esse fato só é levado em consideração no modelo de Brinson. Uma segunda diferença entre os modelos reside na definição do módulo de elasticidade como uma função linear da fração martensítica.

Mais uma vez, apenas o modelo de Brinson adota essa consideração o que, de fato, poderia ter sido feito em todos os modelos, tornando as respostas mais próximas. A diferença que, possivelmente, é a principal distinção entre os modelos, é a inovação introduzida por Brinson separando a variável interna,  $\beta$ , em duas novas variáveis utilizadas para representar de forma distinta as frações martensíticas induzidas por temperatura,  $\beta_T$ , e por tensão,  $\beta_S$ . Isso representa a inclusão de mais uma variante da fase martensítica, denominada martensita maclada, o que também está de acordo com os resultados experimentais.

A Fig.1(a) mostra o fenômeno pseudoelástico onde é possível identificar uma alteração na geometria das curvas, aumentando a área compreendida pelo *loop* de histerese no modelo de Brinson. A Fig.1(b) mostra a pseudolasticidade parcial, onde a transformação de fase inversa não é totalmente concluída. Na Fig.1(c), observa-se que a deformação da fase martensítica se dá de forma coerente, caracterizando a potencialidade dos modelos para descrever o efeito de memória de forma. Na Fig.1(d) tem-se que a fase matriz é composta por austenita e martensita maclada. No modelo de Brinson, a transformação da fase matriz em martensita *detwinned* é obedecida de forma que, inicialmente, tem-se  $0 < \beta_T < 1$  e  $\beta_S = 0$ . Quando a transformação se inicia,  $\beta_T$  começa a dar lugar a  $\beta_S$ , e a liga apresenta uma deformação residual quando está descarregada. A forma associada à fase matriz pode ser recuperada através do aquecimento da amostra a uma temperatura acima de  $A_f$ , o que mostra o efeito de memória de forma. Os demais modelos representam apenas a transformação da parcela austenítica, assinalando uma deformação inicial como se essa tivesse sido ocasionada por imposição de um campo de tensões, uma vez que esses modelos não apresentam a variante da martensita maclada. A Fig.1(e) ressalta ainda mais essa discrepância, apresentando um comportamento elástico linear para os modelos de Tanaka, Boyd & Lagoudas e Liang & Rogers com uma deformação inicial correspondente à deformação residual ( $\epsilon_R = 0,067$ ), enquanto o modelo de Brinson descreve o fenômeno de memória de forma de maneira adequada.

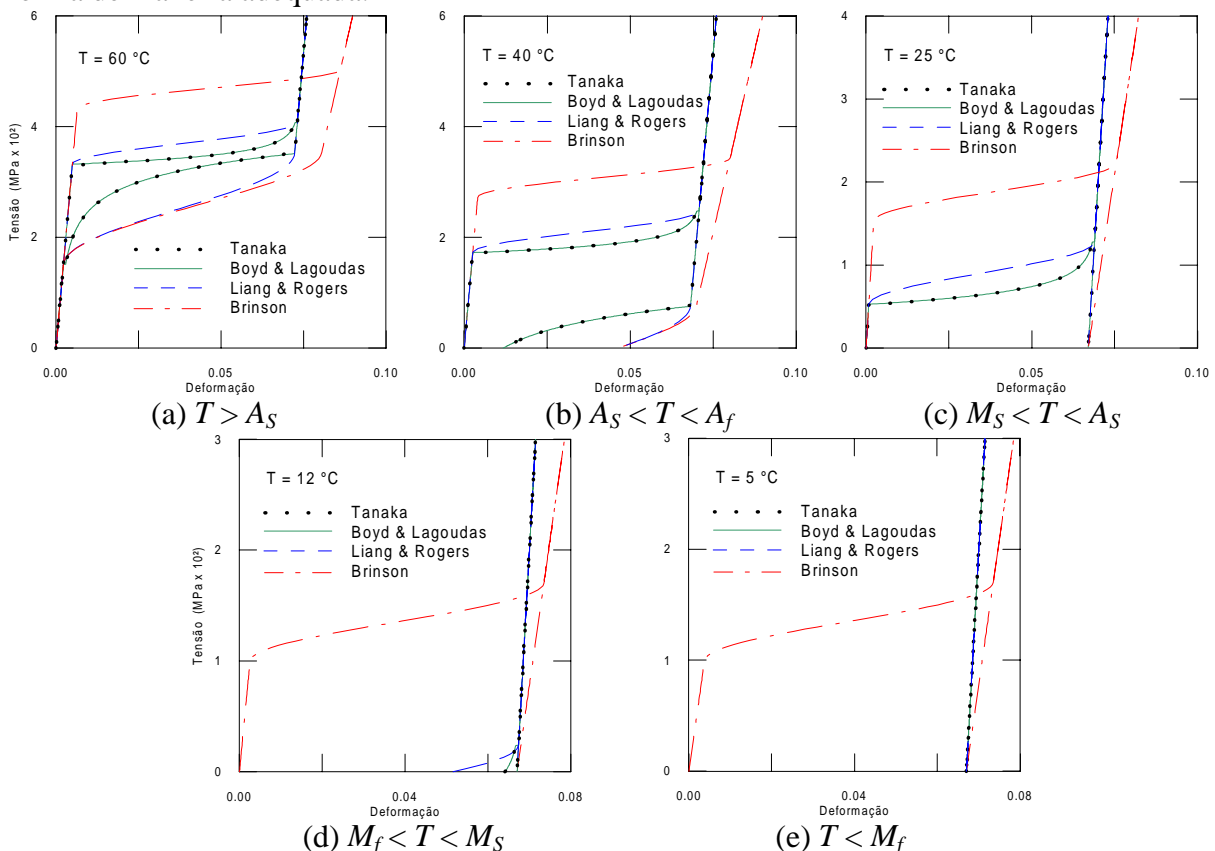


Figura 1 - Curvas Tensão-Deformação para Modelos com Cinética de Transformação.

A seguir, discutem-se os *loops* internos de histerese devido a transformação de fase incompleta, para cada um dos modelos. As Figs.2-4, mostram a resposta prevista pelos diferentes modelos, quando submetidos a histórias de carregamento que resultem em *loops* internos. A temperatura é fixa em  $T = 60^{\circ}\text{C}$ , significando que a fase austenítica é estável. Tanaka *et al.* (1994) discutem uma alternativa ao modelo original de Tanaka para descrever os *subloops*. Neste trabalho, considera-se a inclusão do termo  $\beta_0$  na cinética de transformação austenita  $\Rightarrow$  martensita, o que define a fração martensítica no início da transformação de fase. A partir dessa consideração, todos os modelos são capazes de prever o comportamento pseudoelástico, mostrando os *subloops* de histerese associados a transformações de fase incompletas.

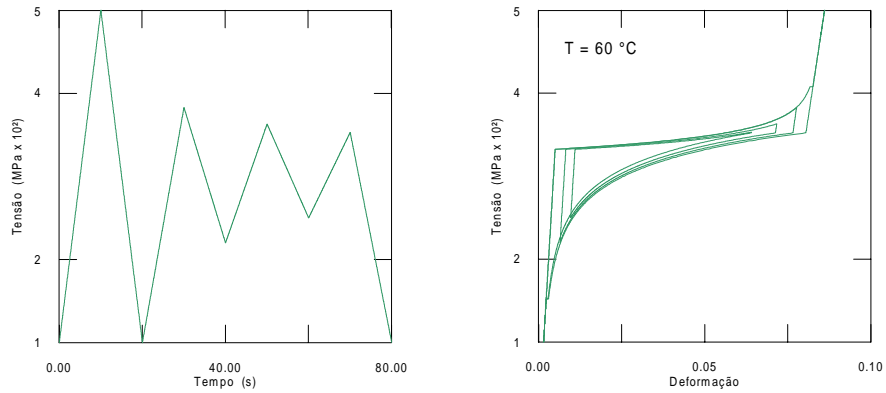


Figura 2 - Modelo de Tanaka. (a) Tensão prescrita; (b) Curva tensão-deformação.

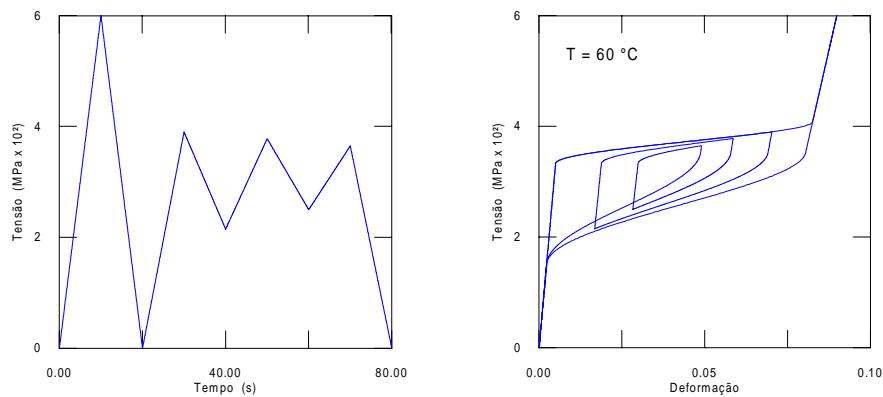


Figura 3 - Modelo de Liang & Rogers. (a) Tensão prescrita; (b) Curva tensão-deformação.

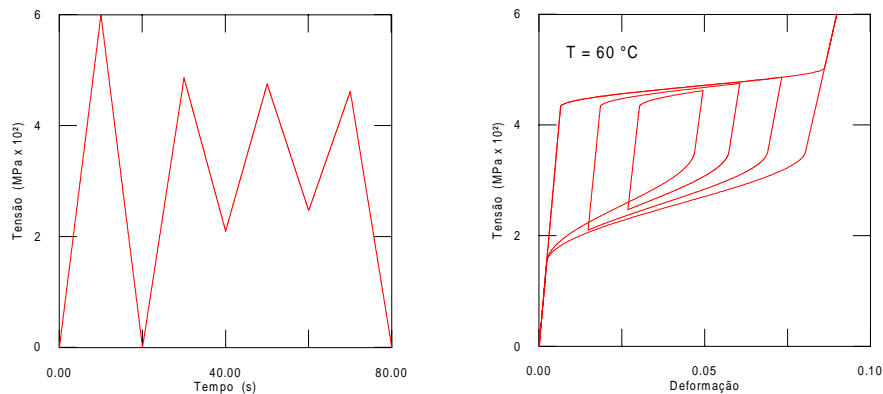


Figura 4 - Modelo de Brinson. (a) Tensão prescrita; (b) Curva tensão-deformação.



## 4. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma revisão crítica sobre os modelos constitutivos com cinética de transformação assumida para descrever o comportamento termomecânico de ligas com memória de forma. Consideram-se os modelos de Tanaka, Boyd & Lagoudas, Liang & Rogers e Brinson que definem diferentes expressões para descrever a cinética da transformação. A partir de simulações numéricas, estabelecem-se algumas diferenças entre os modelos, mostrando que a resposta prevista pelo modelo de Brinson está mais de acordo com os resultados experimentais. Os *subloops* de histerese devido a transformação de fase incompleta podem ser descritos por todos os modelos desde que se considere uma variável associada a fase martensítica no início da transformação nos modelos de Tanaka e de Boyd & Lagoudas.

### *Agradecimentos*

Os autores gostariam de agradecer o suporte do CNPq e da CAPES.

## REFERÊNCIAS

- Achenbach, M. & Müller, I.A., 1982, A Model for Shape Memory, *J. de Physique, Colloque C4*, s.12, Tome 43, pp.163-167.
- Airoidi, G., Riva, G., Vanelli, M., Filippi, V. & Garattini, G., 1997, Oral Environment Temperature-Changes Induced by Cold/Hot Liquid Intake, *American J. of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics*, v.112, n.1, pp.58-63.
- Anders, W. S., Rogers, C.A. & Fuller, C.R., 1992, Vibration and Low-frequency Acoustic Analysis of piecewise-activated Adaptive Composite Panels, *J. Composite Materials*, n. 26, pp.103-120.
- Auricchio, F. & Lubliner, J., 1997, A Uniaxial Model for Shape Memory Alloys, *Int. J. of Solids and Structures*, v.34, n.27, pp. 3601-3618.
- Auricchio, F. & Sacco E., 1997, A One-Dimensional Model for Superelastic Shape Memory Alloys with Different Elastic properties Between Austenite and Martensite, *Int. J. of Non-Linear Mechanics*, v. 32, n.6, pp.1101-1114
- Auricchio, F., Taylor, R.L. & Lubliner, J., 1997, Shape-Memory Alloys: Macromodeling and Numerical Simulations of the Superelastic Behavior, *Comp. Methods in Applied Mech. and Eng.*, v.146, pp. 281-312.
- Bertran, A., 1982, Thermo-Mechanical Constitutive Equations for the Description of Shape Memory Effects in Alloys, *Nuclear Eng. and Design*, v.74, pp. 173-182.
- Birman, V., 1997, Review of Mechanics of Shape Memory Alloy Structures, *Applied Mechanics Review*, v. 50, pp.629-645.
- Boyd, J.G. & Lagoudas, D.C., 1994, Constitutive Model for Simultaneous Transformation and Reorientation in Shape Memory Alloys, *Mech. of Phase Transf. and Shape Memory Alloys*, L.C. Brinson and B. Moran (eds), ASME New York, pp. 159-177.
- Brinson, L.C., 1993, One Dimensional Constitutive Behavior of Shape Memory Alloys: Thermomechanical Derivation with Non Constant Material Functions and Redefined Martensite Internal Variable, *J. Intelligent Materials System and Structures*, n.4, pp. 229-242.
- Brinson, L.C. & Huang, M.S., 1995, Simplifications and Comparisons of Shape Memory Alloy Constitutive Models, *J. of Intelligent Materials Systems and Structures*, v.7, pp. 108-114.

- da Silva, E.P., 1995, Modelagem Mecânica de Transformações de Fase Induzidas por Tensões em Sólidos, Dissertação de Mestrado, UnB - Departamento de Engenharia Mecânica.
- Falk, F., 1980, Model Free-Energy, Mechanics and Thermodynamics of Shape Memory Alloys, ACTA Metallurgica, v.28, pp.1773-1780.
- Fremond, M., 1987, Matériaux à Mémoire de Forme, C.R. Acad. Sc. Paris, Tome 34, s.II, n.7, pp. 239-244.
- Ivshin, Y. & Pence, T.J., 1994, A Constitutive Model for Hysteretic Phase Transition Behavior, Int. J. Eng. Sci., n.32, pp. 681-704.
- Liang, C. & Rogers, C.A., 1990, One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials, J. Intelligent Mat. Sys and Struct., n. 1, pp. 207-234.
- Liang, C. & Rogers, C.A., 1991, Multi-Dimensional Constitutive Relations of Shape Memory Alloys, Proc. of 32<sup>nd</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conf. Part I, pp. 178-185; AIAA paper, pp. 91-116.
- Pacheco, P.M.C.L. & Savi, M.A., 1997, A Non-Explosive Release Device for Applications Using Shape Memory Alloys, COBEM 97 - XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica.
- Rogers, C.A., Liang, C. & Fuller, C.R., 1991, Modeling of Shape Memory Alloy Hybrid Composites for Structural Acoustic Control, J. Acoust. Soc. Am., n.89, pp.210-220.
- Savi, M.A. & Braga, A.M.B., 1993, Chaotic Response of a Shape Memory Oscillator with Internal Constraints, *Proceedings of the 12th Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, Brasília, Brazil.
- Souza, A.C., Mamiya, E.N. & Zouain, N., 1998, Three-Dimensional Model for Solids Undergoing Stress-induced Phase Transformations, European J. Mechanics A - Solids (to appear).
- Tanaka, K., 1985, A Thermomechanical Sketch of Shape Memory Effect: One -Dimensional Tensile Behavior, Res. Mech., v. 18, pp. 251.
- Tanaka, K. & Nagaki, S., 1982, Thermomechanical Description of Materials with Internal Variables in the Process of Phase Transformation, Ingenieur – Archiv., v.51, pp.287-299.
- Tanaka, K., Nishimura, F. & Tobushi, H., 1994, Phenomenological Analysis on Subloops in Shape Memory Alloys Due to Incomplete Transformations, J. Intelligent Material Systems and Structures, v.5, pp.487-493.
- Zhang, J. X., Liu, Y. X., Cai, W. & Zhao, L. C., 1997, The Mechanisms of Two Way-Shape Memory Effect in a Cu-Zn-Al Alloy, Materials Letters, v.33, pp.211-214.

## **ON THE CONSTITUTIVE MODELS WITH ASSUMED TRANSFORMATION KINETICS FOR SHAPE MEMORY ALLOYS**

**Abstract.** *The present contribution reports on an overview of the constitutive models with assumed phase transformation kinetics to describe the thermo-mechanical behavior of shape memory alloys. Numerical simulations are provided and some comparisons are evaluated pointing out some discrepancies among them. Hysteresis subloops due to incomplete phase transformations are also considered.*

**Keywords:** *Shape Memory Alloys, Pseudoelasticity, Constitutive Models.*